Μάθημα 16ο 03/05/2018

Ορισμός

Έστω (X,ρ) μ.χ. Μια οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ υποσυνόλων του X λέμε ότι έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής αν $\forall\, n\in\mathbb{N}$ και $i_1,\dots,i_n\in I$

$$\text{ισχύει } \bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k}\neq\emptyset$$

(ή με άλλα λόγια αν $\forall\, J\subseteq I$ με J πεπερασμένο ισχύει $\bigcap_{i\in J} F_i\neq\emptyset$)

Πρόταση

Έστω (X,ρ) μ.χ. Ο X είναι συμπαγής ανν $\forall$ οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής ισχύει $\bigcap_{i\in I} F_i\neq\emptyset$.

Απόδειξη

($\Longrightarrow$) Έστω (X,ρ) συμπαγής και $(F_i)_{i\in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Θα δ.ο. $\bigcap_{i\in I} F_i\neq\emptyset$. Υποθέτουμε (για άτοπο) ότι $\bigcap_{i\in I} F_i=\emptyset$. Τότε $\bigcup_{i\in I} X\setminus F_i = X\setminus \bigcap_{i\in I} F_i = X\setminus\emptyset = X$ και τα σύνολα $X\setminus F_i$ είναι ανοιχτά $\forall\, i\in I$. Εφόσον ο X είναι συμπαγής υπάρχει $J\subseteq I$ με J πεπερασμένο ώστε $X=\bigcup_{i\in J}(X\setminus F_i)$

Scanned by CamScanner

Τότε $X = X \setminus \bigcap_{i\in J} F_i \Rightarrow \bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$ άτοπο (διότι

η $(F_i)_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής)

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\forall$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων $(F_i)_{i\in I}$ του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής ισχύει $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$
Δείχνουμε ότι ο (X,ρ) είναι συμπαγής

Με άτοπο:
Υποθέτουμε ότι ο (X,ρ) δεν είναι συμπαγής.
Τότε $\exists$ $(G_i)_{i\in I}$ οικογένεια ανοιχτών υποσυνόλων του X με $X = \bigcup_{i\in I} G_i$ ώστε $\forall$ $J \subseteq I$ με J πεπερασμ.

$X \neq \bigcup_{i\in J} G_i$

Θέτουμε $F_i = X \setminus G_i$ για κάθε $i \in I$

Τότε η $(F_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X και $\forall$ $J \subseteq I$ με J πεπερασμένο

ισχύει $\bigcap_{i\in J} F_i = \bigcap_{i\in J} (X \setminus G_i) = X \setminus \bigcup G_i \neq \emptyset$

δηλ. η $(F_i)_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.

Από υπόθεση $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$

δηλ. $\bigcap_{i\in I}(X\setminus G_i)\neq\emptyset$ δηλ. $X\setminus\bigcup_{i\in I}G_i\neq\emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow X\neq\bigcup_{i\in I}G_i$ Άτοπο. Επομένη ο (X,ρ) είναι συμπαγής

ΠΡΟΤΑΣΗ

Κάθε συμπαγής μ.χ. είναι πλήρης

Απόδ.

Έστω (X,ρ) πλήρης. Θα χρησιμοποιήσουμε το χαρακτηρισμό του Cantor για πλήρεις μ.χ.

Έστω $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία μη-κενών κλειστών υποσυνόλων του X με $diam(F_n)\to 0$. Τότε η $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Από την προηγούμενη πρόταση (και εφόσον ο (X,ρ) είναι συμπαγής) προκύπτει $\bigcap F_n\neq\emptyset$. Επομένη ο (X,ρ) είναι πλήρης.

Ορισμός

Έστω (X,ρ) μ.χ. Ο (X,ρ) λέγεται ακολουθιακά συμπαγής αν $\forall$ ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X $\exists$ υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $x\in X$ ώστε $x_{k_n}\xrightarrow{\rho} x$

Ορισμός

Ένας μ.χ. (X,ρ) λέγεται ολικά φραγμένος αν
$\forall \varepsilon>0 \ \exists \ m\in\mathbb{N}, x_1,\dots,x_m\in X,$

$$X=\bigcup_{k=1}^{m} B_\rho(x_k,\varepsilon)$$

(ή με άλλα λόγια $\exists \ Y\subseteq X$ με X πεπερασμένο
$X=\bigcup_{x\in Y} B_\rho(x,\varepsilon)$)

Γενικότερα

Ένα $A\subseteq X$ λέγεται ολικά φραγμένο αν $\forall \varepsilon>0$
$\exists \ x_1,\dots,x_m\in X : A\subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B_\rho(x_k,\varepsilon)$

(Μπορούμε αν θέλαμε να απαιτήσουμε $x_k\in A, k=1,\dots,m$)

Παραδείγματα

α) Κάθε συμπαγής μ.χ. είναι ολικά φραγμένος

β) Ο $\mathbb{R}$, με τη συνήθη μετρική ΔΕΝ είναι ολικά φραγμένος.

ΓΕΝΙΚΑ Κάθε ολικά φραγμένος χώρος είναι φραγμένος. Άρα, αν ένας χώρος δεν είναι φραγμένος δεν είναι ολικά φραγμένος γ) Αν (X,ρ) μ.χ. όπου ο ρ είναι η διακριτή μετρική.

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$$

(X,ρ) ολικά φραγμένος $\Leftrightarrow$ X πεπερασμένος

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ (SOS)

Έστω (X,ρ) μ.χ. Τ.Α.Ε.Ι

1) Ο (X,ρ) είναι συμπαγής
2) Για κάθε άπειρο υποσύνολο A του X ισχύει $A'\neq\emptyset$
3) Ο (X,ρ) είναι ακολουθιακά συμπαγής
4) Ο (X,ρ) είναι πλήρης και ολικά φραγμένος

Απόδ

(1)⇒(2) Έστω $A\subseteq X$ με $A'=\emptyset$ (και δδο το A είναι πεπερασμένο)

Για κάθε $x\in X$ ισχύει $x\notin A'$ άρα $\exists$ $\varepsilon_x>0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon_x)\cap(A\setminus\{x\})=\emptyset$ (ή αλλιώς $B_\rho(x,\varepsilon_x)\cap A\subseteq\{x\}$)

Το $(B_\rho(x,\varepsilon_x))_{x\in X}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του X, συνεπώς, αφού ο (X,ρ) είναι συμπαγής $\exists\, m\in\mathbb{N}$ $x_1,\dots,x_m\in X$ ώστε $X=\bigcup_{k=1}^{m}B_\rho(x_k,\varepsilon_{x_k})$

$$A=A\cap X=\bigcup_{k=1}^{m}\left(A\cap B_\rho(x_k,\varepsilon_{x_k})\right)\subseteq\bigcup_{k=1}^{m}\{x_k\}=\{x_1,\dots,x_m\}$$

και άρα το A είναι πεπερασμένο

Επομένως $\forall$ άπειρο $A\subseteq X$ ισχύει $A'\neq\emptyset$

$(2) \Rightarrow (3)$

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τυχαία ακολουθία στο X.
Θεωρούμε το σύνολο $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ των όρων της ακολουθίας.

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις

→ Αν το A είναι πεπερασμένο:

Τότε $\exists\, x\in X$ και $k_1<k_2<\dots k_n<k_{n+1}$ γνησίως αύξουσα ακολουθίας φυσικών ώστε $x_{k_n}=x$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
Προφανώς $x_{k_n}\longrightarrow x$

→ Αν το A είναι άπειρο: Τότε λόγω υπόθεσης $A'\neq\emptyset$. Άρα $\exists\, x\in A'$.

Επαγωγικά κατασκευάζουμε: $k_1<k_2<\dots<k_n<k_{n+1}<\dots$ ακολουθία φυσικών ώστε $\rho(x_{k_n},x)<\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$\boxed{1^o \text{ βήμα}}$ Επιλέγουμε $k_1\in\mathbb{N}$ με $\rho(x_{k_1},x)<1$
(αυτό είναι εφικτό αφού $B_\rho(x,1)\cap(A-\{x\})\neq\emptyset$)

$\boxed{\text{Γεν. Επαγ. Βήμα}}$ Υποθέτουμε ότι έχουμε επιλέξει $k_1<k_2<\dots<k_n$ ώστε $\rho(x_{k_i},x)<\frac{1}{i}$ για $i=1,\dots,n$

Θέτουμε $M = \{ m \in \mathbb{N} \;\; m > k_n \;\; \rho(x_m, x) < \frac{1}{n+1} \}$

Τότε $M \neq \emptyset$ (διότι αν $M = \emptyset$ τότε $B_\rho(x, \frac{1}{n+1}) \cap A \subseteq \{x_1, \ldots, x_{k_n}\}$ άτοπο αφού $x \in A'$)

Θέτοντας $k_{n+1} = \min M$, έχουμε $k_{n+1} > k_n$ και $\rho(x_{k_{n+1}}, x) < \frac{1}{n+1}$

Έτσι η (x_{k_n}) είναι υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_{k_n} \longrightarrow x$

$(3) \Longrightarrow (4)$

Υποθέτουμε ότι ο (X, ρ) είναι ακολουθιακά συμπαγής

Ο (X, ρ) είναι πλήρης.

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στον X όσο ο (X, ρ) είναι ακολουθιακά συμπαγής υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της x_n και $x \in X$ ώστε $x_{k_n} \longrightarrow x$

Εφόσον η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική και έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο x συμπεραίνουμε ότι $x_n \longrightarrow x$

Συνεπώς ο (X, ρ) είναι πλήρης.

Ο (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος. Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι ο (X, ρ) δεν είναι ολικά φραγμένος. Τότε $\exists$ $\varepsilon > 0$ ώστε:

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N} \text{ και } y_1, \ldots, y_m \in X \text{ ισχύει } X \neq \bigcup_{k=1}^{m} B_\rho(y_k, \varepsilon)} \quad (*)$$

Χρησιμοποιώντας την $(*)$ επαγωγικά κατασκευάζουμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$ με $n \neq m$.

→ Επιλέγουμε $x_1 \in X$ τυχαίο

→ Χρησιμοποιώντας την (*) επιλέγουμε

$x_2 \in X - B_\rho(x_1,\varepsilon)$ δηλ. $\rho(x_2,x_1) \geq \varepsilon$

→ Υποθέτουμε ότι έχουν επιλεγεί $x_1,\dots,x_n \in X$ ώστε αν $i,j \in \{1,\dots,n\}$ με $i \neq j$

$\rho(x_i,x_j) \geq \varepsilon$ με χρήση της (*) επιλέγουμε

$x_{n+1} \in X - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_\rho(x_k,\varepsilon)$. Τότε $\rho(x_{n+1},x_k) \geq \varepsilon$ $\forall n=1$